

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ЧАСТИЦ ИЗМЕЛЬЧЕННОГО ЗЕРНА ПРИ ИХ ПЛОТНОЙ УКЛАДКЕ ТРЕУГОЛЬНИКОМ

Булатов Сергей Юрьевич^{1✉}, Исупов Алексей Юрьевич², Сергеев Александр Георгиевич³, Малышев Григорий Сергеевич⁴, Крестинков Василий Георгиевич⁵

^{1,5}ГБОУ ВО НГИЭУ, Княгинино, Россия

²ФГБНУ ФАНЦ Северо-Востока, Киров, Россия

³ООО «ДОЗА-АГРО», Нижний Новгород, Россия

⁴ПАО «Ростелеком», Нижний Новгород, Россия

¹bulatov_serгей_urevich@mail.ru

Аннотация. Цель работы – определение максимально возможной концентрации частиц измельченного зерна при их плотной укладке треугольником в один слой на поверхности. Предложен способ определения размеров частиц измельченного зерна, который основан на фотографировании проб зерна и обработке полученного изображения. Его реализация подразумевает распределение частиц на поверхности без их пересечения. Для этого нужно знать максимально возможную концентрацию частиц, которая достигается при их укладке. Рассмотрены три способа расчета площади частиц, измельченного зерна. При расчете допускается, что частицы располагаются на плоскости плотными рядами в один слой так, что центр частицы каждого четного слоя смещен относительно нечетного на величину радиуса частицы. При «грубом» расчете все частицы укладываются в два ряда, при этом количество частиц в рядах одинаковое или отличается не более чем на 1 частицу. При уточненном расчете рассматривается площадь, занимаемая 3 частицами с учетом пустот вокруг них. В случае точного расчета возможны случаи как с остатком частиц в рядах, так и без остатка. Условием отсутствия «лишних» частиц является деление без остатка суммы частиц в четном и нечетном ряду на три. При этом возможны два случая: равенство частиц в четном и нечетном ряду и количество частиц в четном и нечетном ряду с разницей в 1 частицу. При рассмотрении всех трех случаев получены выражения для расчета площадей, занимаемых N количеством частиц заданного размера. Представлены сравнительные результаты расчетов площадей тремя способами, а также сравнение с экспериментальными результатами. Установлено, что при расчете укладки частиц треугольником ошибка грубого расчета относительно точного не превышает 5 % при количестве частиц, большем 95, а между уточненным и точным – большем 15 шт. Достаточно применения менее трудозатратного по сравнению с точным уточненного расчета, а сходимость теоретических и экспериментальных результатов составляет более 90 % при диаметре частиц до 1,7 мм и 70 % – при диаметре частиц 2,75 мм.

Ключевые слова: измельченное зерно, концентрация, остаток, ошибка, площадь, раскладка, ряд, способ расчета, столбец, треугольник, частица.

Для цитирования: Определение максимальной концентрации частиц измельченного зерна при их плотной укладке треугольником / С. Ю. Булатов, А. Ю. Исупов, А. Г. Сергеев [и др.] // Вестник Ижевской государственной сельскохозяйственной академии. 2026. № 2(86). С. 161-168. https://doi.org/10.48012/1817-5457_2026_2_161-168.

Введение. Концентрированные корма играют важную роль в кормлении сельскохозяйственных животных и птиц [1, 2–4, 9]. При этом важно соблюдение размеров измельченного зерна в соответствии с требованиями нормативных документов. Для определения размеров измельченного зерна традиционно проводят рассев его проб [5, 7]. Нами предложен новый способ, осно-

ванный на фотографировании проб зерна и обработке полученного изображения [6]. При этом необходимо стремиться к распределению частиц на поверхности, не допуская их пересечения. Для этого нужно знать максимально возможную концентрацию частиц, которая достигается при их укладке треугольником. Поэтому целью работы является определение максимально воз-

можной концентрации частиц измельченного зерна при их плотной укладке треугольником в один слой на поверхности.

Задачи исследования:

- вывести теоретические зависимости для определения площади, занимаемой частицами измельченного зерна, от их размеров;
- оценить влияние параметров частиц измельченного зерна на их концентрацию при укладке треугольником.

Объектом исследования является процесс распределения частиц измельченного зерна в один слой на поверхности.

Методика и материалы исследований.

При расчете введено допущение, что частицы располагаются на плоскости плотными рядами в один слой так, что центр частицы каждого четного слоя смещен относительно нечетного на величину радиуса частицы. Количество частиц в четном k и нечетном j рядах определяются условиями: $j \in N$, $k \in N$, при равном количестве рядов $j = k$; при неравном – $k = j - 1$.

Количество частиц в рядах j и k может быть определено выражением:

$$N = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \cdot k + \left(i - \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \right) \cdot j + z, \quad (1)$$

где $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$ – количество четных рядов с j частицами, которое определяется как наименьшее целое от деления полных рядов i на два;

$i - \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$ – количество нечетных полных рядов с k частицами;

z – остаток частиц.

Возможны несколько способов расчета. При «грубом» расчете все частицы плотно укладываются в два ряда, при этом количество частиц в рядах одинаковое или отличается не более чем на 1 частицу. Под площадью пятна принимается область, ограниченная контурами частиц по периметру пятна. При укладке частиц треугольником выделяются условные площади: $S_{обл}$ – площадь «незанятой» области, образуемая при соприкосновении между собой трех частиц; $S_{окр}$ – площадь проекции частицы с диаметром d на горизонтальную плоскость; $S_{зап}$ – площадь, занимаемая соприкасающимися между собой тремя частицами, включая свободные области (рис. 1).

Для рассматриваемого случая площади $S_{обл}$ и $S_{зап}$ равны соответственно:

$$S_{обл} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} d^2 - 3 \cdot \frac{\pi \cdot 60}{4 \cdot 360} \cdot d^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8} \right) \cdot d^2, \quad (2)$$

$$S_{зап} = 3 \cdot S_{окр} + 4 \cdot S_{обл} =$$

$$= 3 \cdot \pi \frac{d^2}{4} + 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8} \right) \cdot d^2 =$$

$$= \left(\frac{3}{4} \pi + \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) \cdot d^2 = \left(\frac{1}{4} \pi + \sqrt{3} \right) \cdot d^2. \quad (3)$$

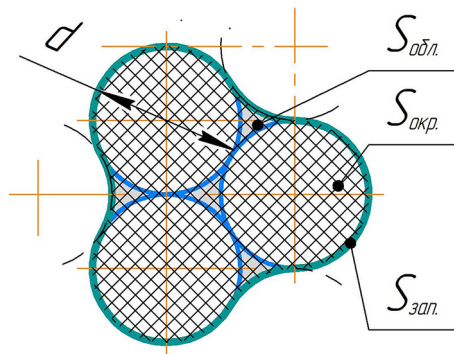


Рисунок 1 – Расчетная схема к определению площади заполнения при укладке частиц треугольником

Коэффициент заполнения пространства внутри «пятна» равен:

$$K_{\Delta} = \frac{3 \cdot S_{окр}}{S_{зап}} = \frac{3 \cdot \pi \frac{d^2}{4}}{\left(\frac{1}{4} \pi + \sqrt{3} \right) \cdot d^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot \pi \cdot d^2}{4 \left(\frac{1}{4} \pi + \sqrt{3} \right) \cdot d^2} = \frac{3 \cdot \pi}{(\pi + 4\sqrt{3})} = 0,936. \quad (4)$$

В качестве фигуры для раскладки частиц рассматривается прямоугольник, обеспечивающий наименьший периметр P (квадрат). В случае наличия остатка z , не позволяющего уложить N частиц в «квадрат», осуществляем перерасчет сторон нового «квадрата» таким образом, чтобы наименьшее потенциальное количество уложенных в него частиц было не больше имеющегося числа частиц N :

$$z = N - M \leq 0. \quad (5)$$

где z – остаток частиц, не помещающихся в «квадрат»;

M – наименьший «квадрат», который помещается в N частиц.

В случае грубого расчета определение площади пятна осуществляется с наименьшими трудозатратами по формуле:

$$S_{пят.груб} = N(2S_{обл.кв} + S_{окр}) =$$

$$= d^2 N \left(\frac{\pi + 4}{8} \right) \cong 0,893 N d^2, \quad (6)$$

$$\text{где } S_{обл.кв} = d^2 \left(\frac{4 - \pi}{16} \right).$$

В случае уточненного расчета рассматривается площадь, занимаемая 3 частицами с учетом пустот вокруг них $S_{\text{обл}}$:

$$S_{\text{пят.уточ}} = S_{\text{ч}} + S_{\text{нз}} = \frac{N}{3}(3S_{\text{окр}} + 6S_{\text{обл}}), \quad (7)$$

где $S_{\text{ч}}$, $S_{\text{нз}}$ – площадь, занимаемая N частицами с диаметром d , и площадь, образуемая при контакте частиц соответственно;

3 – наименьшее количество частиц, обеспечивающее раскладку треугольником;

6 – наибольшее количество «пустот» при плотной укладке треугольником (рис. 2).

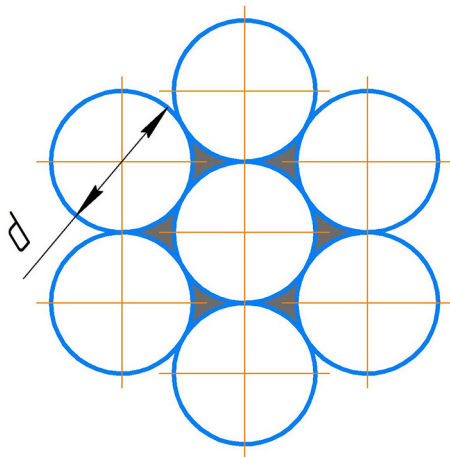


Рисунок 2 – Пояснение к уточненному расчету

В случае усложненного расчета при укладке треугольником, обеспечивающем наименьший периметр (точном расчете), возможны случаи как с остатком частиц в рядах (рис. 3 а, б), так и без остатка (рис. 3 в, г). Условием отсутствия «лишних» частиц является деление без остатка суммы частиц в четном и нечетном рядах на три. При этом возможны два случая: равен-

ство частиц в четном и нечетном рядах (рис. 3 в) и количество частиц в четном и нечетном рядах с разницей в 1 частицу (рис. 3 г).

Условие образования фигуры с наименьшим периметром при треугольной раскладке будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} (j+k) \cdot \lfloor i/2 \rfloor + z = N \\ k = j - 1 \\ \lfloor i/2 \rfloor \cdot a \cdot d \cong j \cdot d \end{cases}, \quad (8)$$

$$\begin{cases} (2j-1) \cdot \lfloor i/2 \rfloor + z = N \\ \lfloor i/2 \rfloor \cdot a \cong j \end{cases}. \quad (9)$$

Решение системы (8) даст уравнение:

$$(2a\lfloor i/2 \rfloor - 1) \cdot \lfloor i/2 \rfloor + z = N, \quad (10)$$

$$2a\lfloor i/2 \rfloor 2 - i2 - (N - z) = 0, \quad (11)$$

где a – ширина двух смежных рядов частиц.

При $z = 0$, а также $i \in N$ будем иметь два корня, но верным в нашем случае будет только положительный, а именно:

$$\lfloor i/2 \rfloor = \frac{1 + \sqrt{1 + 8a \cdot N}}{4a}. \quad (12)$$

При равенстве частиц в рядах i выражение (8) имеет вид:

$$\begin{cases} (j+k) \cdot \lfloor i/2 \rfloor + z = N \\ j = k \\ \lfloor i/2 \rfloor \cdot a \cdot d \cong j \cdot d + d/2 \end{cases}, \quad (13)$$

$$\begin{cases} 2j \cdot \lfloor i/2 \rfloor + z = N \\ \lfloor i/2 \rfloor \cdot a - \frac{1}{2} \cong j \end{cases}. \quad (14)$$

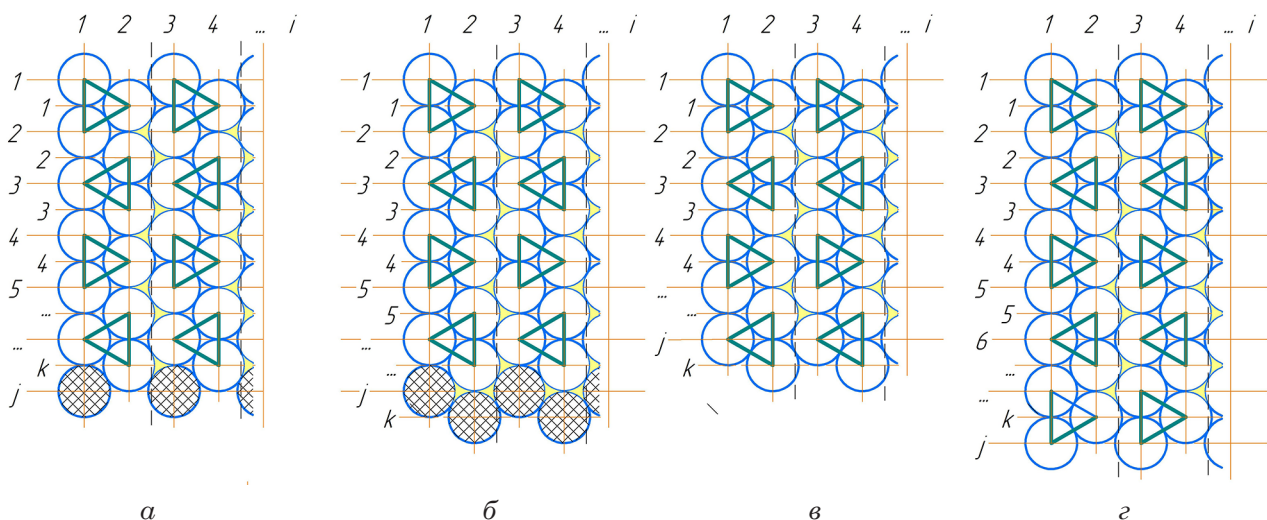


Рисунок 3 – Раскладка: а и г – при неравном количестве частиц в четном и нечетном рядах; б и в – при равном количестве частиц в четном и нечетном рядах

Решение системы уравнения (13) приведет к тому же результату:

$$2([i/2] \cdot a - 1/2) \cdot [i/2] + z = N, \quad (15)$$

$$2a[i/2]^2 - [i/2] - (N - z) = 0. \quad (16)$$

$$[i/2] = (1 + \sqrt{(1 + 8a \cdot N)})/4a. \quad (17)$$

Рассмотрим случай, когда $z \neq 0$. Для этого определим площади, занимаемые частицами. Области, образующиеся при укладке частиц с равным и неравным количеством в четном и нечетном рядах, равны между собой. Для их расчета будем пользоваться расчетной схемой на рисунке 4 а, так как количество видов характерных областей в этом случае перекрывает все возможные варианты.

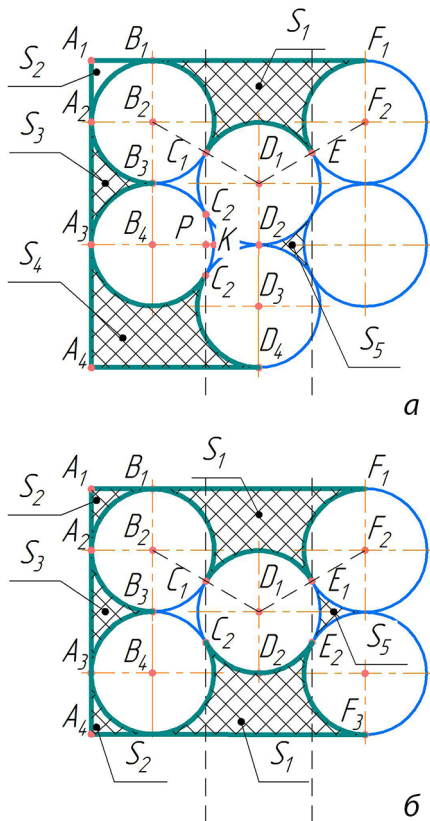


Рисунок 4 – Расчетная схема к определению площадей характерных областей: а – с равным количеством частиц в четном и нечетном рядах; б – с неравным количеством частиц в четном и нечетном рядах

Определение площади характерной области 1:

$$S_{\text{обл.1}} = S_{B_1 B_2 D_1 F_2 F_1} - S_{\text{сект.}EF_2 F_1} - S_{\text{сект.}ED_1 C_1} - S_{\text{сект.}C_1 B_2 B_1}; \quad (18)$$

$$S_{B_1 B_2 D_1 F_2 F_1} = S_{B_1 B_2 F_2 F_1} + S_{B_2 D_1 F_2} =$$

$$= \frac{d}{2} \cdot \sqrt{3}d + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}d \cdot \frac{d}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}d^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}d^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}d^2;$$

$$S_{\text{сект.}EF_2 F_1} = S_{\text{сект.}C_1 B_2 B_1} = \pi \frac{d^2}{4} \cdot \frac{\angle EF_2 F_1}{360^\circ} =$$

$$= \pi \frac{d^2}{4} \cdot \frac{90^\circ + 30^\circ}{360^\circ} = \pi \frac{d^2}{12};$$

$$S_{\text{сект.}ED_1 C_1} = \pi \frac{d^2}{4} \cdot \frac{\angle ED_1 C_1}{360^\circ} =$$

$$= \pi \frac{d^2}{4} \cdot \frac{180^\circ - 2 \cdot 30^\circ}{360^\circ} = \pi \frac{d^2}{12};$$

$$S_{\text{сект.}EF_2 F_1} + S_{\text{сект.}ED_1 C_1} + S_{\text{сект.}C_1 B_2 B_1} =$$

$$= S_{\text{окр}} = 3\pi \frac{d^2}{12} = \pi \frac{d^2}{4};$$

$$S_{\text{обл.1}} = S_{B_1 B_2 D_1 F_2 F_1} - S_{\text{окр}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}d^2 - \pi \frac{d^2}{4} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{4}\right)d^2 \cong 0,514d^2. \quad (19)$$

Определение площади характерной области 2:

$$S_{\text{обл.2}} = \frac{S_{\text{оп.кв.окр.}} - S_{\text{окр}}}{4} = \frac{d^2 - \frac{\pi}{4}d^2}{4} =$$

$$= \left(\frac{4 - \pi}{16}\right)d^2 \cong 0,054d^2. \quad (20)$$

Определение площади характерной области 3:

$$S_{\text{обл.3}} = S_{A_2 B_2 B_4 A_3} - S_{\text{сект.}A_2 B_2 B_3} - S_{\text{сект.}A_3 B_4 B_3}; \quad (21)$$

$$S_{\text{сект.}A_2 B_2 B_3} = S_{\text{сект.}A_3 B_4 B_3} =$$

$$= \pi \frac{d^2}{4} \cdot \frac{\angle A_2 B_2 B_3}{360^\circ} = \pi \frac{d^2}{4} \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} = \pi \frac{d^2}{16};$$

$$S_{A_2 B_2 B_4 A_3} = d \cdot \frac{d}{2} = \frac{d^2}{2};$$

$$S_{\text{обл.3}} = \frac{d^2}{2} - 2 \cdot \pi \frac{d^2}{16} = \frac{4 - \pi}{8}d^2 = 0,107d^2. \quad (22)$$

Определение площади характерной области 4:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{обл.4}} &= S_{A_3 D_2 D_4 A_4} - S_{\text{сект.} A_3 B_4 K} - \\
 &\quad - S_{\text{сект.} C_2 D_3 C_4} - \frac{S_{\text{обл.}}}{2}; \quad (23) \\
 S_{A_3 D_2 D_4 A_4} &= (A_3 P + P D_2) \cdot A_3 A_4 = \\
 &= \left(\left(\frac{d}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{d}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{d}{2} \right) \cdot d = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) d^2 \cong 1,366d^2.
 \end{aligned}$$

Из выражения (2) находим:

$$S_{\text{обл.}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8} \right) \cdot d^2 \cong 0,04d^2.$$

Из рисунка 4 определяем:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{сект.} A_3 B_4 K} &= S_{\text{сект.} C_2 D_3 C_4} = \frac{S_{\text{окр}}}{2} = \pi \frac{d^2}{8} \cong 0,392d^2; \\
 S_{\text{обл.4}} &= 1,366d^2 - 2 \cdot 0,392d^2 - \\
 &\quad - \frac{0,023}{2} d^2 \cong 0,571d^2. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Определим величину стороны квадрата, занимаемую частицами при раскладке треугольником. Для этого обратимся к рисунку 5.

Исходя из схемы, представленной на рисунке 5, значение стороны квадрата, занимаемого частицами при расположении треугольником, равно:

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{4}d + \frac{\sqrt{3}}{4}d = \frac{4\sqrt{3}}{4}d = \sqrt{3}d. \quad (25)$$

Тогда с учетом данных, представленных на рисунке 4, и уравнения (25) выражение (17) запишется как:

$$[i/2] = \frac{1 + \sqrt{1 + 8a \cdot N}}{4a} = \frac{1 + \sqrt{1 + 8 \cdot \sqrt{3}d \cdot N}}{4 \cdot \sqrt{3}d}. \quad (26)$$

При неравном количестве частиц в смежных рядах получим:

$$i = 3 \cdot \frac{\sqrt{8 \cdot N \cdot \sqrt{3}} + 1}{12}; j = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{8 \cdot N \cdot \sqrt{3}} + 1}{12}.$$

Полученный результат количества частиц в первом ряду i округляем до целого значения, а количество пар рядов j округляем с точностью до 0,5.

По полученным значениям $[i]$ и $[j]$ проверяем относительную ошибку сторон «квадрата»:

$$\delta_1 = \left(1 - \frac{S_{\text{груб}}}{S_{\text{пят.точ}}} \right) \cdot 100\%, \quad \delta_2 = \left(1 - \frac{S_{\text{груб}}}{S_{\text{пят.точ}}} \right) \cdot 100\%. \quad (27)$$

Тогда площадь, занимаемая при неравном количестве частиц, запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{пят.точ}} &= S_{\text{пят.груб}} - S_1(2[j] - 2) - 2S_2 - \\
 &\quad - (2[i] - 3)S_3 - 2S_4 - |z|\pi d^2/4 - 2S_{\text{обл.}}|z|, \quad (28)
 \end{aligned}$$

где $S_{\text{пят.груб}}$ – площадь, занимаемая частицами «груб»:

$$S_{\text{пят.груб}} = [i][j] d^2.$$

При равном количестве частиц в рядах:

$$i = 3 \cdot \frac{\sqrt{2\sqrt{3}N}}{6}; j = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2\sqrt{3}N}}{6}. \quad (29)$$

Полученный результат количества частиц в первом ряду i округляем до целого значения, а количество пар рядов j округляем с точностью до 0,5.

По полученным значениям $[i]$ и $[j]$ проверяем относительную ошибку сторон «квадрата»:

$$\delta = 1 - \frac{d \cdot (i + 0,5)}{d(\sqrt{3}j + \frac{2-\sqrt{3}}{2})} = 1 - \frac{i + 0,5}{\sqrt{3}j + \frac{2-\sqrt{3}}{2}}. \quad (30)$$

Тогда площадь, занимаемая при равном количестве частиц, запишется в виде:

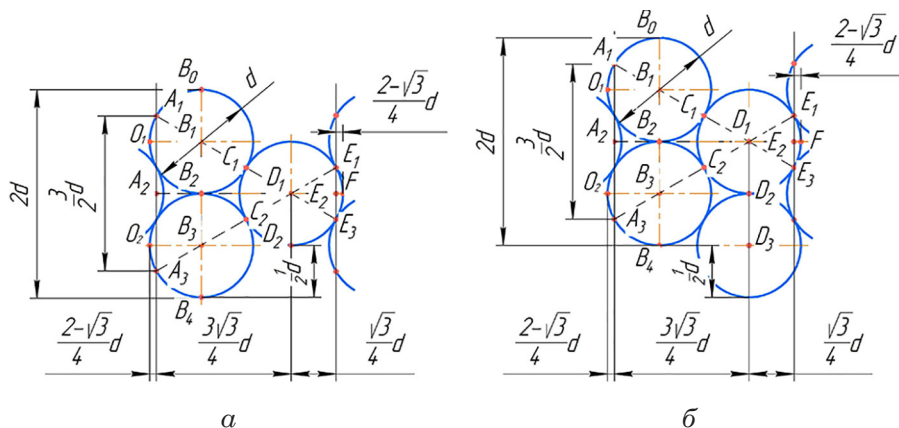


Рисунок 5 – Расчетная схема к определению величины стороны квадрата: а – с равным количеством частиц в четном и нечетном рядах; б – с неравным количеством частиц в четном и нечетном рядах

$$S_{\text{пят.точ}} = S_{\text{пят.груб}} - S_1(2[j] - 2) - 2S_2 - (2[i] - 2 - |z|)S_3 - 2S_4 - |z|\pi d^2/4 - 2S_{\text{обл}}|z|. \quad (31)$$

Результаты исследований. На основании выражений (6) и (7), (28) и (31) построены зависимости площади заполнения частицами от их диаметра при грубом, уточненном и точном расчетах (рис. 6). Из графиков видно, что с увеличением числа частиц на поверхности сходимость возрастает. Для количества частиц 25 шт. ошибка грубого расчета относительно точного составляет 6,86 %, а уточненного – 3,67 %. При увеличении частиц до 100 шт. ошибка составляет 4,99 и 1,85 % соответственно, при 1000 шт. – 3,68 и 0,58 %.

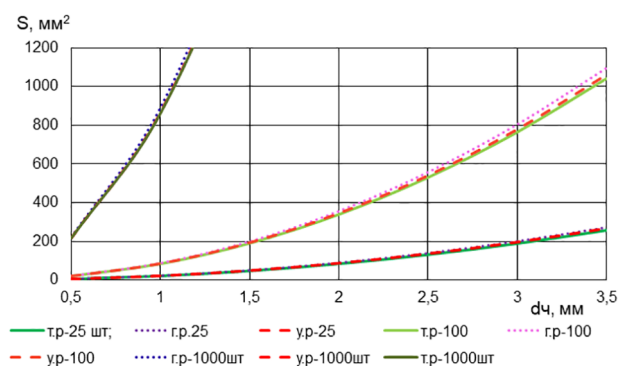


Рисунок 6 – Зависимость площади пятна частиц на поверхности от их диаметра при плотной раскладке треугольником: при т. р. – точном расчете; у. р. – уточненном расчете; г. р. – грубом расчете

Более точные значения относительной ошибки представлены на рисунке 7. Допустимый порог расхождений значений в 5 % между грубым и точным расчетами наблюдается при количестве частиц, большем 95, а между уточненным и точным – большем 15 шт.

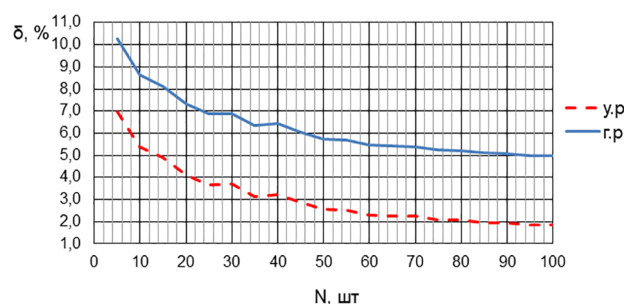


Рисунок 7 – Зависимость относительной ошибки расчета от количества распределяемых частиц при раскладке треугольником

На основании проведенных расчетов можно рекомендовать использовать менее трудоемкий

уточненный способ при рассмотрении укладки частиц треугольником.

С целью оценки правильности выполненных теоретических расчетов проведен эксперимент по укладке частиц измельченного зерна. Для этого плотно друг к другу в один слой были уложены частицы средним размером 0,9, 1,25, 1,75, 2,25 и 2,75 мм в количестве не менее 100 шт. (рис. 8). Далее определялась концентрация частиц на единице площади. Сравнение теоретических и экспериментальных данных показывает, что ошибка растет с увеличением диаметра частиц (рис. 9). При диаметре частиц до 1,7 мм сходимость результатов выше 90 %, а при увеличении диаметра до 2,75 мм – снижается до 70 %. Это связано с большим расхождением в форме частицы при увеличении ее размеров.



Рисунок 8 – Пример распределения частиц измельченного зерна средним диаметром: а – 2,75 мм; б – 2,25 мм

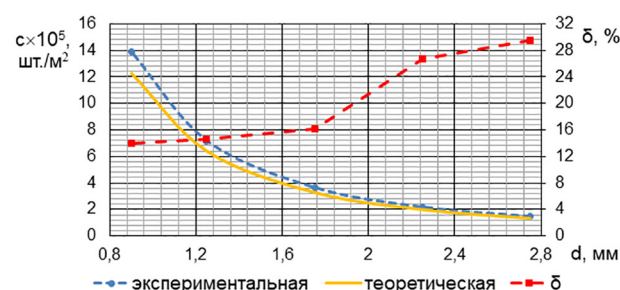


Рисунок 9 – Зависимость концентрации частиц и относительной ошибки от их диаметра при раскладке треугольником

Полученные значения концентрации используются для определения массы навески при известной плотности зерновок [8]. Необходи-

мо отметить, что данные значения концентрации являются максимально возможными.

Выводы.

1. В результате проведенных расчетных исследований установлено, что при расчете укладки частиц треугольником ошибка грубого расчета относительно точного не превышает 5 % при количестве частиц, большем 95, а между уточненным и точным – большем 15 шт., и достаточно применение менее трудозатратного по сравнению с точным уточненного расчета.

2. Сравнение теоретических и экспериментальных данных указывает на сходимость результатов выше 90 % при диаметре частиц до 1,7 мм и 70 % – при 2,75 мм.

Список источников

1. Абуов С. К., Бабаджанова Н. Современные аспекты кормления молочных коров // *Ео ipso*. 2023. № 10. С. 89-90.
2. Буряков Н. П., Бурякова М. А. Особенности кормления высокопродуктивных коров в период сухостоя. Часть 3. Молочная река. 2018. № 4 (72). С. 56-57.
3. Ефимова Д. В., Федоров В. Г., Мануриков Я. Н. Кормление скота при роботизированном доении // Актуальные вопросы в развитии агропромышленного, химического и лесного комплексов: сб. тез. науч.-практ. конф. молодых ученых и специалистов. Великий Новгород, 2021. С. 115-117.
4. Лаврентьев А. Ю., Шерне В. С. Дорашивание бычков с использованием рожьсодержащих комбикормов // *Нива Поволжья*. 2021. № 2 (59). С. 115-121.
5. Оценка эффективности работы центробежного измельчителя фуражного зерна / А. М. Абаляхин [и др.] // *АгроЭкоИнженерия*. 2024. № 1 (118). С. 43-57.
6. Перспективный метод анализа гранулометрического состава измельченного зерна на базе цветовой кластеризации и морфологической сегментации изображений / С. Ю. Булатов [и др.] // *Вестник НГИЭИ*. 2025. № 3 (166). С. 7-21.
7. Савиных П. А., Турубанов Н. В., Мохонкин А. М. Определение оптимальных конструктивно-технологических параметров молотковой дробилки с ре-

шетами в торцевых поверхностях // *Агроинженерия*. 2023. Т. 25, № 5. С. 17-22.

8. Сумина А. В., Полонский В. И. Плотность зерна как альтернативный показатель качества и его зависимость от условий выращивания и генотипа ячменя // *Вестник КрасГАУ*. 2013. № 7 (82). С. 114-120.

9. Тукфатулин Г. С., Годжиев Р. С. Особенности роста и развития телок черно-пестрой и красной степной породы // *Известия Горского государственного аграрного университета*. 2020. Т. 57, № 4. С. 103-107.

References

1. Abuov S. K., Babadzhanova N. Sovremennyye aspekty` kormleniya molochny`x korov // *Eo ipso*. 2023. № 10. С. 89-90.
2. Buryakov N. P., Buryakova M. A. Osobennosti kormleniya vy`sokoproduktivny`x korov v period suxostoya. Chast` 3. Molochnaya reka. 2018. № 4 (72). С. 56-57.
3. Efimova D. V., Fedorov V. G., Manurikov Ya. N. Kormlenie skota pri robotizirovannom doenii // Aktual`ny`e voprosy` v razvitii agropromyshlennogo, ximicheskogo i lesnogo kompleksov: sb. tez. nauch.-prakt. konf. molody`x ucheny`x i specialistov. Velikij Novgorod, 2021. С. 115-117.
4. Lavrent`ev A. Yu., Sherne V. S. Dorashhivanie by`ch-kov s ispol`zovaniem rozh`soderzhashhix kombikormov // *Niva Povolzh`ya*. 2021. № 2 (59). С. 115-121.
5. Ocenka e`ffektivnosti raboty` centrobezhnogo izmel`chatelya furazhnogo zerna / A. M. Abalixin [i dr.] // *AgroE`koInzheneriya*. 2024. № 1 (118). С. 43-57.
6. Perspektivny`j metod analiza granulometricheskogo sostava izmel`chennogo zerna na baze cvetovoj klasterizacii i morfologicheskoy segmentacii izobrazhenij / S. Yu. Bulatov [i dr.] // *Vestnik NGIE`I*. 2025. № 3 (166). С. 7-21.
7. Saviny`x P. A., Turubanov N. V., Moshonkin A. M. Opredelenie optimal`ny`x konstruktivno-tekhnologicheskix parametrov molotkovoj drobilki s reshetami v torcevy`x po-verxnostyax // *Agroinzheneriya*. 2023. Т. 25, № 5. С. 17-22.
8. Sumina A. V., Polonskij V. I. Plotnost` zerna kak al`ternativny`j pokazatel` kachestva i ego zavisimost` ot uslovij vy`rashhivaniya i genotipa yachmenya // *Vestnik KrasGAU*. 2013. № 7 (82). С. 114-120.
9. Tukfatulin G. S., Godzhiev R. S. Osobennosti rosta i razvitiya telok cherno-pestroj i krasnoj stepnoj porody` // *Izvestiya Gorskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta*. 2020. Т. 57, № 4. С. 103-107.

Сведения об авторах:

С. Ю. Булатов¹, доктор технических наук, доцент, <https://orcid.org/0000-0001-9099-0447>;

А. Ю. Исупов², кандидат технических наук, <https://orcid.org/0000-0002-3399-5089>;

А. Г. Сергеев³, кандидат технических наук, <https://orcid.org/0000-0003-0466-9003>;

Г. С. Малышев⁴, кандидат технических наук;

В. Г. Крестинков⁵, аспирант

^{1,5}ГБОУ ВО НГИЭУ, 606340, Россия, Княгинино, ул. Октябрьская, 22

²ФГБНУ ФАНЦ Северо-Востока, 610007, Россия, Киров, ул. Ленина, 166а

³ООО «Доза-Агро», 603028, Россия, Нижний Новгород, ш. Жиркомбината, 20

⁴ПАО «Ростелеком», 603000, Россия, Нижний Новгород, ул. Б. Покровская, 56

¹bulatov_sergey_urevich@mail.ru

Original article

DETERMINING THE MAXIMUM CONCENTRATION OF CRUSHED GRAIN PARTICLES DENSELY LAYERED IN A TRIANGLE**Sergey Yu. Bulatov^{1✉}, Alexey Yu. Isupov², Alexander G. Sergeev³, Grigory S. Malyshev⁴, Vasily G. Krestinkov⁵**^{1,5}Nizhny Novgorod State University of Engineering and Economics, Knyaginino, Russia²N. V. Rudnitsky Federal Agrarian Research Center of the North-East, Kirov, Russia³OOO DOZA-AGRO, Nizhny Novgorod, Russia⁴Rostelecom PJSC, Nizhny Novgorod, Russia¹bulatov_sergey_urevich@mail.ru

Abstract. *The research aim is to determine the maximum possible concentration of crushed grain particles when they are densely placed in a triangle in a single layer on the surface. We have proposed a method for determining the particle size of crushed grain, which is based on photographing grain samples and processing the resulting image. The implementation of this method implies the distribution of particles on the surface without their intersection. To do this, you need to know the maximum possible concentration of particles, which is achieved when they are layered. The article discusses three methods for calculating the area of crushed grain particles when they are densely placed in a triangle in a single layer on the surface. In calculations, it is assumed that the particles are arranged on a plane in dense rows in one layer so that the particle center of each even layer is shifted relative to the odd particle radius. In a "rough" calculation, all particles are placed in two rows, while the number of particles in the rows is the same or differs by no more than 1 particle. The refined calculation considers the area occupied by 3 particles, taking into account the voids around them. As for an accurate calculation, there may be cases with or without a residue of particles in the rows. The condition for the absence of "extra" particles is to divide the sum of the particles in an even and odd row by three. If this occurs, two cases are possible: the equality of particles in an even and odd row and the number of particles in an even and uneven row with a difference of 1 particle. When considering all three cases, expressions are obtained for calculating the areas occupied by N number of particles of a given size. Comparative results of area calculations using three methods are presented, as well as a comparison with experimental results. It has been found that when calculating the laying of particles by a triangle, the error of the rough calculation relative to the accurate does not exceed 5 % with a particle number greater than 95, and between the refined and accurate – more than 15 pieces. The use of a refined calculation, which requires significantly less effort compared to an accurate one, proves to be sufficient. The degree of convergence between theoretical and experimental findings is more than 90 % for particles with diameters up to 1.7 mm, and 70 % for particles of 2.75 mm diameter.*

Key words: *crushed grain, concentration, residue, error, area, laying, row, calculation method, column, triangle, particle.*

For citation: Bulatov S. Yu., Isupov A. Yu., Sergeev A. G., Malyshev G. S., Krestinkov V. G. Determining the maximum concentration of crushed grain particles densely layered in a triangle. *The Bulletin of Izhevsk State Agricultural Academy*. 2026; 2 (86): 161-168. (In Russ.). https://doi.org/10.48012/1817-5457_2026_2_161-168.

Authors:**S. Yu. Bulatov^{1✉}**, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, <https://orcid.org/0000-0001-9099-0447>;**A. Yu. Isupov²**, Candidate of Technical Sciences, <https://orcid.org/0000-0002-3399-5089>;**A. G. Sergeev³**, Candidate of Technical Sciences, <https://orcid.org/0000-0003-0466-9003>;**G. S. Malyshev⁴**, Candidate of Technical Sciences;**V. G. Krestinkov⁵**, Graduate student^{1,5}Nizhny Novgorod State Engineering and Economic University, 22a Oktyabrskaya St., Knyaginino, Russia, 606340²N. V. Rudnitsky Federal Agrarian Research Center of the North-East, 166a Lenina St., Kirov, Russia, 610007³OOO Doza Agro, 20 Shosse Zhirkombinata St., Nizhny Novgorod, Russia, 603028⁴PJSC Rostelecom, 56 Bolshaya Pokrovskaya St., Nizhny Novgorod, Russia, 603000¹bulatov_sergey_urevich@mail.ru

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest: the authors declare that they have no conflict of interests.

Статья поступила в редакцию 10.02.2026; одобрена после рецензирования 25.02.2026; принята к публикации 05.06.2026.

The article was submitted 10.02.2026; approved after reviewing 25.02.2026; accepted for publication 05.06.2026.